

# TD Polynômes

LNC Exercice 1 ♣♦ POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV On considère la suite de polynômes définie par

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n$  est de degré  $n$ , et, pour  $n \geq 1$ , de coefficient dominant  $2^{n-1}$ .

2. Relation fonctionnelle.

- Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ , factoriser  $\cos a + \cos b$ .
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(*) \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ .
- Montrer que  $T_n$  est l'unique polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant  $(*)$ .

3. Racines et factorisation.

- En utilisant  $(*)$  expliciter  $n$  racines distinctes de  $T_n$ .

$$\text{b) Factoriser } T_n \text{ et calculer } \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right).$$

## Rigidité polynomiale

IGJ Exercice 2 Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant

- $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = n^2$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = n^2 + (-1)^n$
- $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sin x$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = e^x$
- $\forall x \in [0, 2\pi], P(x) = \sin x$
- $\forall x \geq 0, P(x) = \sqrt{x}$

OWS Exercice 3 ♣♡ Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme vérifiant  $P(X+1) = P(X)$ . Montrer que  $P$  est un polynôme constant.

3JZ Exercice 4 ♣ Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme non nul tel que  $(X+3)P(X) = XP(X+1)$ .

- Montrer que si  $\alpha$  est une racine complexe non nulle de  $P$ , alors  $\alpha + 1$  est également une racine de  $P$ .
- En déduire que toutes les racines complexes de  $P$  sont réelles, et que  $P$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- Montrer que si  $\alpha$  est une racine de  $P$  différente de  $-2$ , alors  $\alpha - 1$  est une racine de  $P$ .  
En déduire si  $\alpha$  est racine de  $P$ , alors  $\alpha \in \{-2, -1, 0\}$ .
- Quels sont les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant  $(X+3)P(X) = XP(X+1)$ ?

EHV Exercice 5 Soit  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  et  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  et  $f: x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$  un polynôme trigonométrique.

- Montrer qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-inx}P(e^{ix})$ .
- Montrer que  $f$  s'annule au plus  $2n$  fois sur  $[0, 2\pi[$ .

## Algèbre

OGM Exercice 6 ♣✿ Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que

- $P = X^2 P'$
- $P = X P'$
- $P(2X) = X P'(X)$
- $(X-1)P' = nP$
- $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$

Indication : Considérer le degré, ou le coefficient dominant. Pour le 4, écrire  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et déterminer les coefficients.

MYO Exercice 7 On note  $\tan^{(n)}$  la dérivée  $n$ -ième de  $\tan$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $P_n$  tel que  $\tan^{(n)} = P_n(\tan)$ .

Préciser son degré, et son coefficient dominant. En déduire que  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\tan^{(n)}(x) \geq 0$ .

QFH Exercice 8 Soit  $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - a_k) \in \mathbb{C}[X]$  scindé. Montrer que, pour  $z \in \mathbb{C}$  différent des  $a_i$ , on a  $\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k}$ .

L7R Exercice 9 ♣ En développant le polynôme  $(X+1)^{2n} = (X+1)^n(X+1)^n$  de deux manières, calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ .

## Arithmétique

Exercice 10 ♣✿ Déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par

- $A = X^2 - 3X + 2$
- $B = X^2 - 2X + 1$

Indication : Pour  $A$ , écrire la division euclidienne, calculer  $R(1)$  et  $R(2)$ . En déduire les coefficients de  $R$ . Pour  $B$  :  $B'(1) = 0$ .

K8R Exercice 11 ♣ Soit  $A = 1 + X + X^2$  et  $P = 1 + X^n + X^{2n}$ .

- Montrer que  $A \mid P$  si et seulement si  $P(j) = 0$ .
- Déterminer les  $n \in \mathbb{N}$  pour lesquelles  $A$  divise  $P$ .

KUB Exercice 12

- Pour  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on considère la division euclidienne  $n = pq + r$  de  $n$  par  $p$ .
  - Montrer que  $X^p - 1$  divise  $X^{pq} - 1$ .
  - Montrer que le reste de la division euclidienne de  $X^n - 1$  par  $X^p - 1$  est  $X^r - 1$ .  
En déduire que  $X^p - 1$  divise  $X^n - 1$  si et seulement si  $p \mid n$ .
  - Retrouver ce résultat en utilisant la factorisation de ces polynômes dans  $\mathbb{C}[X]$ .
- ★ Montrer que pour  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $\text{pgcd}(X^a - 1, X^b - 1) = X^{\text{pgcd}(a, b)} - 1$ .

## Racines

76I Exercice 13 ↗ Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  dont les racines complexes sont  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

1. Quelles sont les racines des polynômes a)  $Q_1 = P(2X)$ ? b)  $Q_2 = P(1 - X)$ ? c)  $Q_3 = P(X^2)$ ?
2. On considère  $Q = X^n P(\frac{1}{X})$ , appelé polynôme réciproque de  $P$ .
  - a) Si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , vérifier que  $Q$  est un polynôme, et décrire ses coefficients.
  - b) Quelles sont les racines de  $Q$ ?

D22 Exercice 14 ↗ ↘ Soit  $P = X^n + 1$ .

1. Déterminer les racines complexes de  $P$ , puis factoriser  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
2. Factoriser  $P$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Ind : Différencier suivant la parité de  $n$ .

C32 Exercice 15 ↗ Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $p_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$  et  $q_n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$ .

1. Donner une relation entre  $q_n$  et  $p_n$ .
2. Factoriser le polynôme  $R(X) = 1 + X + \dots + X^{n-1}$ . En déduire que  $q_n = n$ .

98K Exercice 16 ★ [ORAL ENS]

1. Pour  $n \geq 1$ , montrer qu'il existe  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin(4n\theta) = \cos \theta \sin \theta P_n(\cos^2 \theta)$ .
2. Calculer  $\prod_{k=1}^{2n-1} \cos(\frac{k\pi}{4n})$  puis  $\prod_{k=1}^n \cos(\frac{(2k-1)\pi}{4n})$ , puis  $\prod_{k=1}^n \cos(\frac{k\pi}{2n+1})$ .

## ... et multiplicité

BQM Exercice 17 ↗ Soit  $P = X^3 - aX + b \in \mathbb{K}[X]$ .

1. On suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Déterminer une CNS sur  $a, b$  pour que les trois racines de  $P$  soient simples. *On trouve  $4a^3 \neq 27b^2$ .*  
Ind : L'existence d'une racine double revient à la résolution d'un système. Injecter la valeur de  $x^2$  dans l'autre équation.
2. Retrouver le résultat précédent en calculant le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $P'$ .
3. En déduire une CNS sur  $p, q, r$  pour que les racines de  $X^3 + pX^2 + qX + r = 0$  soient simples.
4. On suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $a > 0$ . Déterminer une CNS sur  $a, b$  pour que  $P$  admette trois racines réelles distinctes.

D4E Exercice 18 ↗ Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme pair.

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Montrer que si  $\lambda$  est racine de  $P$  de multiplicité  $m$ ,  $-\lambda$  l'est également.
2. Montrer que si 0 est racine, elle a une multiplicité paire. En déduire que  $P$  admet un nombre pair de racines, comptées avec multiplicité.
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $(X^2 - 1)^2$  divise  $P = X^{2n+2} - X^{2n} - X^2 + 1$ .

OTZ Exercice 19 Montrer que  $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$  n'a pas de racine multiple dans  $\mathbb{C}$ .

EWO Exercice 20 ★ Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P' \mid P$ .

## Relations coefficients-racines

8VI Exercice 21 1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Comparer  $\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2$  et  $n \sum_{k=1}^n x_k^2$ .

2. Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  un polynôme scindé sur  $\mathbb{R}$ , de racines  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Montrer que  $a_n a_{n-2} \leq \frac{n-1}{2n} a_{n-1}^2$ .

19M Exercice 22 ★ SOMMES DE NEWTON Soient  $a_1, \dots, a_n$  des scalaires. On note  $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_i) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i X^{n-i}$  où les  $\sigma_i$  sont les fonctions symétriques élémentaires des racines, et on considère les sommes de Newton  $S_k = \sum_{i=1}^n a_i^k$ .

1. Si  $p \geq n$ , montrer que  $S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \sigma_2 S_{p-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n S_{p-n} = 0$ .
2. ★ Pour  $1 \leq p \leq n$ , montrer que  $S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \dots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1} S_1 + (-1)^p \sigma_p p = 0$ .

En particulier, si les coefficients de  $P$  sont entiers, les sommes  $S_k$  sont entières.

## Autres

6DI Exercice 23 ↗ On note  $\mathcal{S}_+$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant  $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) > 0$ , et  $\mathcal{S}$  ceux vérifiant  $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) \geq 0$ .

1. Caractériser sans justifier les décompositions en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  des polynômes de  $\mathcal{S}_+$ .
2. Caractériser sans justifier les décompositions en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  des polynômes de  $\mathcal{S}$ .
3. On note  $\mathcal{U}$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  qui s'écrivent sous la forme  $P = A^2 + B^2$ , pour  $A, B \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer que  $\mathcal{U}$  est stable par produit, puis que  $\mathcal{U} = \mathcal{S}$ .

GS5 Exercice 24 ★

1. Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$ .
2. Déterminer les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ .
3. Si  $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ , a-t-on nécessairement  $P \in \mathbb{Z}[X]$ ?

Indication : Interpolation.